

要約

有理数体 \mathbb{Q} に 1 の n 乗根 ζ_n を加えた数体系である円分体 $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ は、代数学において基本的かつ重要な研究対象である。我々はその円分体の部分体をすべて明示的に表す方法を新たに発見し、その証明に成功した。

導入：体の拡大

【体】 四則演算が自由に行える数の集合例)

\mathbb{Q} ... 有理数体。有理数全体の集合。

$\mathbb{Q}(\sqrt{2})$... 有理数と $\sqrt{2}$ で四則演算して得られる数全体の集合。

※ $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ は \mathbb{Q} の拡大とみなせる。

【基底】

例) $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ の \mathbb{Q} 上の基底は $\{1, \sqrt{2}\}$

つまり $\mathbb{Q}(\sqrt{2})$ に含まれる任意の数は、ある有理数 a, b を用いて、 $a + b\sqrt{2}$ と一意に表せる。

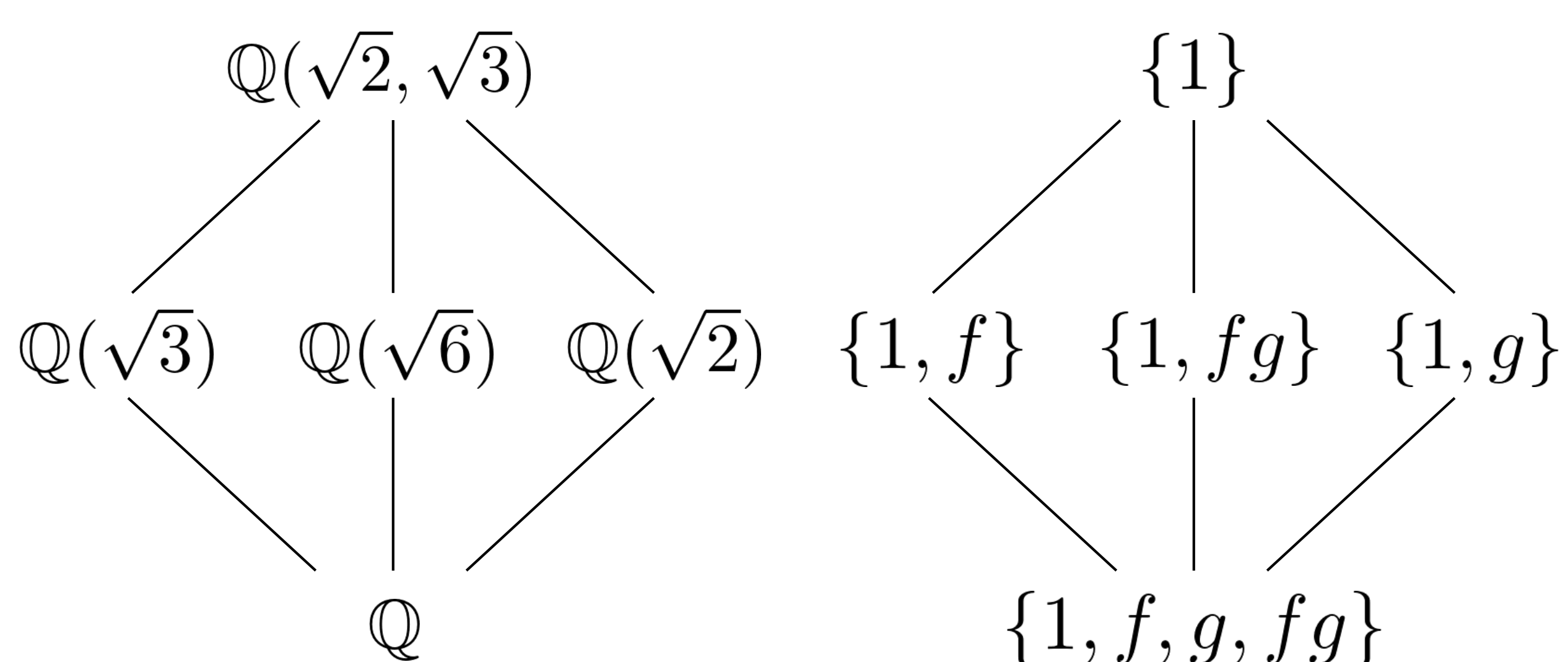
【Galois理論の基本定理】

\mathbb{Q} の拡大体 K からそれ自身への写像であって、ある扱いやすい条件をみたすものの集合を Galois 群 ($\text{Gal}(K/\mathbb{Q})$ とかく) という。その体のすべての部分体は、この Galois 群の部分群と 1 対 1 に対応する。

例)

$f: \sqrt{2} \mapsto -\sqrt{2}$ $g: \sqrt{3} \mapsto -\sqrt{3}$

とすると、



すなわち、Galois群をすべて求め、Galois理論の対応を考えることで、部分体をすべて考えることができる。

導入：円分体

【1のn乗根】

$x^n - 1 = 0$ の解。

その1つは

$$\zeta_n = \cos \frac{2\pi}{n} + i \sin \frac{2\pi}{n}$$

n 個の解を $\zeta_n, \zeta_n^2, \dots, \zeta_n^n$ とおける。

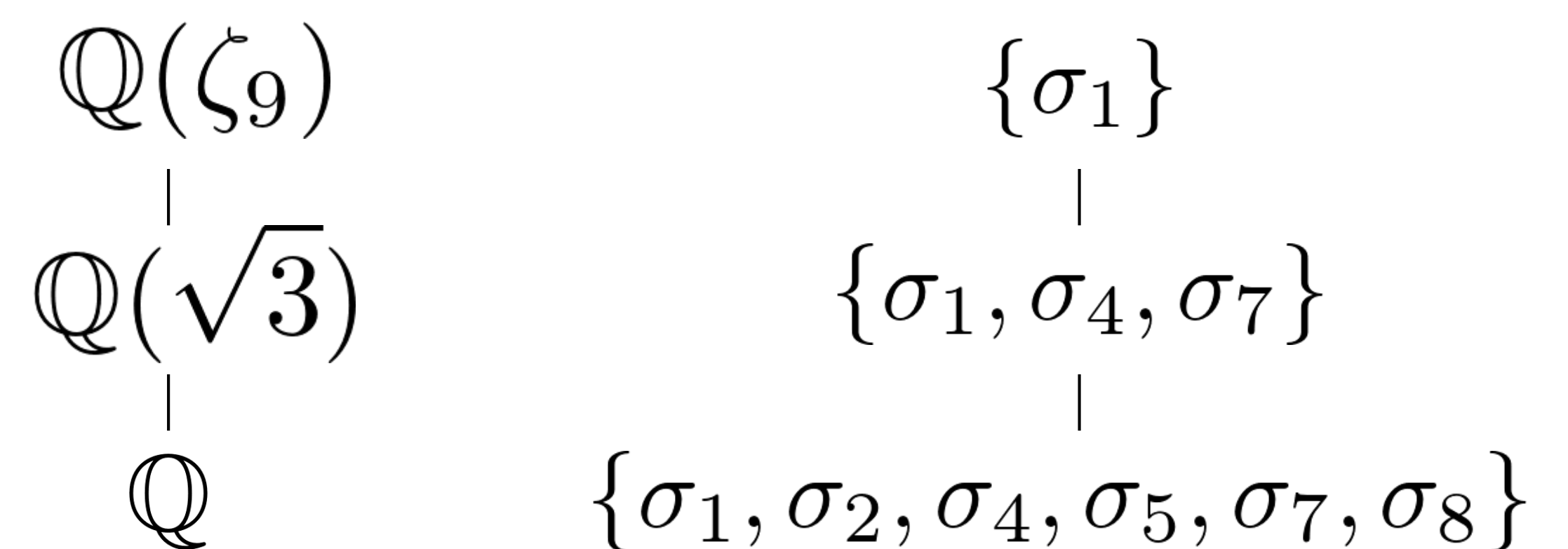
これらは複素数平面における単位円を等分する。

【円分体】

有理数と ζ_n で四則演算して得られる数全体の集合。 $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ とかく。

<円分体の拡大の例>

$\mathbb{Q}(\zeta_9)$ の Galois 群は $\sigma_i: \zeta_9 \mapsto \zeta_9^i$ とおくと $\{\sigma_1, \sigma_2, \sigma_4, \sigma_5, \sigma_7, \sigma_8\}$ と表せる。



【Kronecker-Weberの定理】

\mathbb{Q} のすべてのAbel拡大体は $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ の部分体である。

この定理から、円分体の部分体を求めることに重要性を見出せる。

研究内容

ここでは、円分体のGalois群の部分群 H に対応する部分体 $M_{(n,H)}$ を決定し、その証明の概要を記す。

【補題 1】

以下のように ξ_n を定義する。

※ただし $\text{rad}(n)$ は正整数 n の互いに異なる素因数の積を表し、 Σ は $\text{rad}(n)$ の倍数かつ n の約数である正整数 m すべてについて和を取ることを表す。

$$\xi_n = \sum_{\text{rad}(n)|m|n} \zeta_m$$

このとき、 $\{\sigma(\xi_n) \mid \sigma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})\}$ は $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ の \mathbb{Q} 上の基底である。

※ $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ に含まれる任意の数を線形結合で表せることから示される。 ξ_n を定義したのは $\{\sigma(\zeta_n) \mid \sigma \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})\}$ が基底とならない場合があるからである。

例) $n = 9$ のときを考える。 $\text{rad}(9) = 3$ であるので $\xi_9 = \zeta_9 + \zeta_3$ となる。

また基底として

$\{\sigma_1(\xi_9), \sigma_2(\xi_9), \sigma_4(\xi_9), \sigma_5(\xi_9), \sigma_7(\xi_9), \sigma_8(\xi_9)\}$ が取れる。

【補題 2】

以下のように $\beta_{(n,\tau H)}$ を定義する。

$$\beta_{(n,\tau H)} = \sum_{\sigma \in \tau H} \sigma(\xi_n)$$

このとき $\{\beta_{(n,\tau H)} \mid \tau H \in \text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})/H\}$ は $M_{(n,H)}$ の \mathbb{Q} 上の基底である。

※補題1をGaloisの基本定理の対応に適用することで示される。 $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})/H$ の要素は H によって $\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})$ を分割することで定義できる集合である。

例) $H = \{\sigma_1, \sigma_4, \sigma_7\}$ とすると

$\text{Gal}(\mathbb{Q}(\zeta_n)/\mathbb{Q})/H$ の要素は $H = \{\sigma_1, \sigma_4, \sigma_7\}$

と $\sigma_2 H = \{\sigma_2, \sigma_5, \sigma_8\}$ であり、

$\beta_{(9,H)} = \sigma_1(\xi_9) + \sigma_4(\xi_9) + \sigma_7(\xi_9)$ と

$\beta_{(9,\sigma_2 H)} = \sigma_2(\xi_9) + \sigma_5(\xi_9) + \sigma_8(\xi_9)$

が $M_{(n,H)}$ の基底となる。またここから

$M_{(n,H)}$ が二次体であることもわかる。

【命題】

$$M_{(n,H)} = \mathbb{Q}(\beta_{(n,H)})$$

※この命題により $M_{(n,H)}$ を決定するという本研究の目標が達成される。証明には $\beta_{(n,\tau H)}$ をすべて解に持つ多項式を考え最小多項式の性質を用いることを必要とする。

例) $n = 9$, $H = \{\sigma_1, \sigma_4, \sigma_7\}$ のとき

$$M_{(9,H)} = \mathbb{Q}(\beta_{(9,H)})$$

が成立する。実際に $\beta_{(9,H)}$ を計算してみると、定義式から

$$\beta_{(9,H)} = \sigma_1(\xi_9) + \sigma_4(\xi_9) + \sigma_7(\xi_9)$$

$$= 3\zeta_3$$

$$= \frac{-3+3\sqrt{3}i}{2}$$

が成立するので

$$M_{(9,H)} = \mathbb{Q}(\beta_{(9,H)}) = \mathbb{Q}(\sqrt{3})$$

となる。

今後の展望

- $M_{(n,H)}$ の整数環を一般に求める。
- $M_{(n,H)}$ の代数的性質についてより考察を深める。

参考文献

- 雪江明彦 『代数学2 環と体とガロア理論』 日本評論社
- J. Neukirch 『Algebraische Zahlentheorie』