0315　滋賀県立膳所高等学校

円分体の部分体の決定

田辺 隆晟　時田 真之介　宮田 航平　村木 智直

抄録

有理数体$\mathbb{Q}$に１のべき根ζ_nを加えた数体系である円分体$\mathbb{Q}(\zeta_n)$は、代数学において基本的かつ重要な研究対象である。我々はその円分体の部分体をすべて明示的に表す方法を新たに発見し、その証明に成功した。

１．研究の背景と目的

“有理数体$\mathbb{Q}$のすべての Abel 拡大体は円分体$\mathbb{Q}(\zeta_n)$の部分体である”という、Kronecker-Weber の定理なるものが知られている。我々はこの定理の主張から円分体の部分体を求めることに一般性や重要性を見出し、これを目的として研究を行った。

２．前提知識

・**１のｎ乗根**…n 乗して 1 になる n 個の複素数のこと。$\zeta_n = \cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$ とおくと、その n 個は $\zeta_n, \zeta_n^2, \cdots, \zeta_n^n$ と表される。

・**原始ｎ乗根**…1 の n 乗根の中で、n 乗して初めて 1 になる数。n と互いに素な整数 k を用いて ζ_n^k と表される。

・**円分体**…有理数とζ_nで四則演算して得られる数の集合。$\mathbb{Q}(\zeta_n)$ とかく。

・**Galois の基本定理**…円分体からそれ自身への写像であって、ある扱いやすい条件をみたすものの集合を Galois 群という。円分体のすべての部分体は、この Galois 群の部分群と 1 対 1 に対応する。

３．方法

$\mathbb{Q}(\zeta_n)$のすべての部分体を明示的に表す方法の概要を記す。

Galois の基本定理より、すべての部分体を考えるときに Galois 群の部分群それぞれに対応する部分体（以下$M_{(n,H)}$とかく）を考えればよいので、以下の手順で$M_{(n,H)}$を求める。

① 円分体の基底を求める。右式のξ_nで基底を構成できる。　$\xi_n = \sum_{rad(n)|m|n} \zeta_m$

※ただし rad(n)は正整数 n の互いに異なる素因数の積を表し,

Σは rad(n)の倍数かつ n の約数である正整数 m すべてについて和を取ることを表す.

② $M_{(n,H)}$の基底を求める。右式の $\beta_{(n,H)}$で基底を構成できる。　$\beta_{(n,H)} = \sum_{\sigma \in H} \sigma(\xi_n)$

③ $\mathbb{Q}$に$\beta_{(n,H)}$を添加すれば $M_{(n,H)}$ になることがわかる。

４．結果と考察

円分体の部分体は$M_{(n,H)} = \mathbb{Q}(\beta_{(n,H)})$ と表せることがわかった。ζ_nを用いてもうまくいかなかったところで、新たにξ_nを定義したことにこの研究の独自性がある。一部の n については $M_{(n,H)}$の整数環を求めることができたが、一般の n については求めることができていないので、今後の目標としたい。

５．参考文献

・雪江明彦「代数学２　環と体とガロア理論」　日本評論社

６．**キーワード**　円分体　１のべき根　体の拡大

0315　Shiga Prefectural Zeze High School

The Subfield of The Cyclotomic Field

Ryusei Tanabe　Shinnosuke Tokita　Kohei Miyata　Tomonao Muraki

Abstract　A cyclotomic field $\mathbb{Q}(\zeta_n)$, which is a number field obtained by adjoining a complex root of unity ζ_n to the field of rational numbers $\mathbb{Q}$, is basic and important in algebra. We discovered a way to explicitly express all of the subfields of the cyclotomic field and succeeded in proving it.

１． Introduction

"Every finite abelian extension of $\mathbb{Q}$ is a subfield of $\mathbb{Q}(\zeta_n)$". This is known as Kronecker-Weber theorem. We found the generality and importance of the assertion of this theorem in the search for subfields of $\mathbb{Q}(\zeta_n)$, and this was the purpose of our research.

２． Basic Knowledge

・n-th roots of unity…They are complex numbers that yields 1 when raised to power n. Let ζ_n be $\cos(2\pi/n) + i\sin(2\pi/n)$, the roots are expressed as $\zeta_n, \zeta_n^2, \cdots, \zeta_n^n$.

・Primitive roots of unity…Let x be an n-th root of unity, if x is not an mth-root of unity for m < n , x is a primitive nth- root of unity. If k and n are coprime, ζ_n^k is primitive n-th roots of unity.

・Cyclotomic field…It is a set obtained by four arithmetic operations with $\mathbb{Q}$ and ζ_n.

・Fundamental theorem of Galois theory…Galois group is a set of maps from $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ to itself that satisfy certain tractable conditions. This theorem asserts that there is a one-to-one correspondence between the subfield of $\mathbb{Q}(\zeta_n)$ and subgroups of its Galois group.

３． Method

The following is an overview of how to explicitly represent all subfields of $\mathbb{Q}(\zeta_n)$.

By using Fundamental theorem of Galois theory, we only have to discuss the subfields that corresponds to the subgroups of Galois group. Hereafter, we express the subfields as $M_{(n,H)}$. The following procedure is used to obtain $M_{(n,H)}$.

$$\xi_n = \sum_{rad(n)|m|n} \zeta_m$$

① First, we found the basis of $\mathbb{Q}(\zeta_n)$.

We obtained the basis by using ξ_n defined by the following formula.

② Secondly, we found the basis of $M_{(n,H)}$.

$$\beta_{(n,H)} = \sum_{\sigma \in H} \sigma(\xi_n)$$

We obtained the basis by using $\beta_{(n,H)}$ defined by the following formula.

③ Thirdly, we found that we can get $M_{(n,H)}$ by adjoining $\beta_{(n,H)}$ to $\mathbb{Q}$.

４． Results and Discussion

We found $M_{(n,H)} = \mathbb{Q}(\beta_{(n,H)})$. If we had based our study solely on ζ_n, it would not have developed, but the new definition of ξ_n made our study work. The uniqueness of our study lies in that we defined it. We were able to obtain the ring of integers of $M_{(n,H)}$ for some n, but not for n in general. We would like to discuss that in the future.

５． References

・Akihiko Yukie　『Daisugaku 2　Kan to tai to Galois riron』　NIPPON HYORON SHA

６． Key Words　Cyclotomic fields　Roots of unity　Field extension